

## GRÈCE

### 2. L'écriture des nombres

Exercice 2 : Il faut 31 signes.

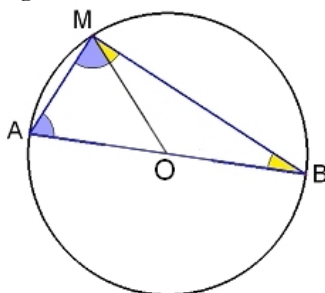
Exercice 3 : Les deux nombres additionnés sont 273 et 221. Leur somme 494 s'écrit

HHHH F ΔΔΔΔ IIII

Exercice 4 : Les deux nombres à multiplier s'écrivent respectivement ME et IZ. Leur produit s'écrit ΨΞE.

### 3. Thalès, le premier mathématicien grec

Exercice 1 : Thalès peut montrer que l'angle  $\widehat{AMB}$  est droit et qu'il y a 2 triangles isocèles dans la figure. La conclusion est immédiate.



Exercice 2 :  $HB = HA$  car les triangles rectangles HOB et HOA sont égaux.

Exercice 3 :  $HE = \frac{AB}{2} = 220$  coudées ;  $HS' = HE + ES' = 220 + 57 = 277$

coudées soit 146 m.

Puisque la droite (SS') fait un angle de  $45^\circ$  avec l'horizontale, le triangle rectangle SHS' est isocèle en H donc  $SH = HS'$ . On obtient  $SH = 146$  m.

### 4. Des nombres et des cailloux

Exercice 1 : 15, 21, 28, 36.

Exercice 2 : Pour  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \text{etc.}$ ,  $\frac{n(n+1)}{2} = 1, 3, 6, 10, 15, \text{etc.}$

Exercice 3 : C'est 36. Pour les Grecs, 1 n'était pas un nombre carré.

Exercice 4 : Oui, c'est le cas par exemple de 36 :  $36 = 6 \times 6 = \frac{8 \times 9}{2}$ .

Exercice 5 : Les 2 formules représentent effectivement 2 nombres triangulaires consécutifs.

Pour  $n \geq 2$ ,  $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n + n^2}{2} = n^2$ .

Exercice 6 : On a  $1 + 3 = 4$ ,  $1 + 3 + 5 = 9$ ,  $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ ,  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ , etc.

Exercice 7 : On a  $2 + 4 = 6 = 3 \times 2$ ,  $2 + 4 + 6 = 12 = 4 \times 3$ ,  $2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 5 \times 4$ , etc.

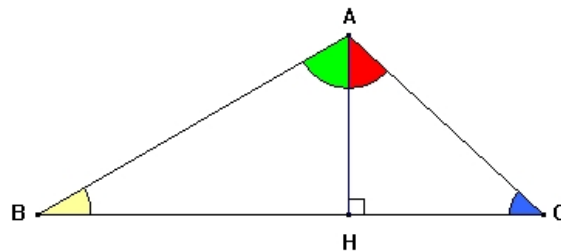
Exercice 8 : 6 et 12 sont des nombres rectangulaires de la forme  $n(n+1)$ .

Exercice 9 : C'est 29.

Exercice 10 : Les diviseurs propres de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 dont la somme est 28. Les diviseurs propres de 496 sont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248 dont la somme est 496.

## 5. La géométrie de Pythagore

Exercice 1 : En traçant une hauteur du triangle ABC, on le partage en 2 triangles rectangles.



Le résultat en découle.

Exercice 2 : Il suffit de compter le nombre des triangles rectangles isocèles qui composent le carré bleu et les carrés verts.

Exercice 3 : 7, 24 et 25.

Exercice 4 : On a

$$n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2 = n^2 + \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{4} = \frac{n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^2 + 1}{4}. \text{ On a aussi}$$

$$\left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)^2 = \frac{n^4 + 2n^2 + 1}{4}.$$

Exercice 5 : 7,05 cm.

## 6. Moyennes et racines carrées

Exercice 1 : On a  $ad = bc$  d'où  $ad + bd = bc + bd$ .

On en tire  $d(a + b) = b(c + d)$  puis  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ .

Exercice 2 : La moyenne arithmétique de 3 entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  est égale à  $\frac{a+b+c}{3}$ .

Exercice 3 : La moyenne géométrique de 36 et de 81 est  $\sqrt{36 \times 81} = 6 \times 9 = 54$ .  
 La moyenne géométrique de 12 et de 49 est  $\sqrt{12 \times 49} = \sqrt{4 \times 3 \times 49} = 2 \times 7 \times \sqrt{3} = 24,248\dots$

Exercice 4 : a) Par définition,  $b = \frac{ab}{\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{2ab}{a+b}$

donc  $\frac{1}{h} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a}$ , ce qui conduit au résultat.

b) Par définition,  $h = \frac{ab}{m}$ . Mais  $ab = g^2$  donc  $h = \frac{g^2}{m}$ .

Exercice 5 : Dans le triangle rectangle ABH on a  $AB^2 = AH^2 + BH^2$ . Dans le triangle rectangle BCH on a  $BC^2 = BH^2 + CH^2$ .  
 En ajoutant membre à membre, on obtient :

$$AB^2 + BC^2 = AH^2 + 2BH^2 + CH^2.$$

$$\text{Comme } AB^2 + BC^2 = AC^2 \text{ et } AC^2 = (AH + HC)^2.$$

$$\text{Il en résulte que } AH^2 + 2AH.HC + HC^2 = AH^2 + 2BH^2 + CH^2.$$

Après simplification, on obtient  $2AH.HC = 2BH^2$  d'où le résultat.

Exercice 6 : a) M est le milieu de [AB] donc  $AM = \frac{AB}{2} = \frac{AH+HB}{2} = \frac{a+b}{2} = m$ .

b) Le triangle ACB est rectangle en C puisqu'il est inscrit dans un cercle de diamètre [AB]. On a  $CH^2 = AH \times HB = a \times b$  donc  $CH = g$ .

c) Dans le triangle CHM rectangle en H et de hauteur HD, on a  $CD \times CM = CH^2$  soit  $CD \times m = g^2$ . On en tire  $CD = \frac{g^2}{m} = h$ .

Exercice 7 : On prend  $10 = 5 \times 2$ .

a) Les données et le premier calcul de  $m$  et de  $h$ .

	A	B	C	D	E
1		$x$	$y$	$m$	$h$
2		5	2	3,5	2,85714286
3		3,5	2,85714286		
4					
5					
6					
7					
8					
9					

b) avec la commande *Recopie Vers le bas*

	A	B	C	D	E
1		$x$	$y$	$m$	$h$
2		5	2	3,5	2,85714286
3		3,5	2,85714286	3,17857143	3,14606742
4		3,17857143	3,14606742	3,16231942	3,1622359
5		3,16231942	3,1622359	3,16227766	3,16227766
6		3,16227766	3,16227766	3,16227766	3,16227766
7					
8					
9					
10					

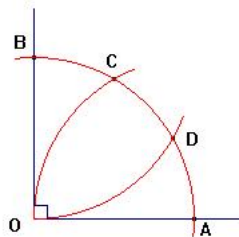
Une fois la feuille de calcul terminée, on peut changer les valeurs de  $x$  et de  $y$ .

## 7. La trisection des angles

Exercice 1 : Les arcs ont des rayons égaux.

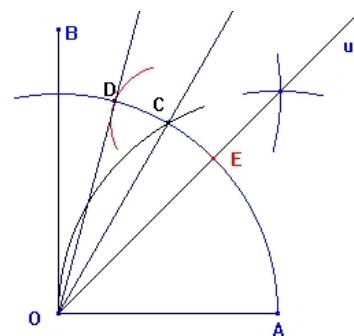
Les triangles AOC et BOD sont équilatéraux.

Par suite, les arcs  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$  et  $\widehat{DA}$  sont tous les trois des arcs de  $30^\circ$ .



Exercice 2 : La bissectrice  $[Ou)$  d'un angle droit  $\widehat{AOB}$  le partage en 2 angles de  $45^\circ$  (pour la construire, il faut tracer 3 arcs de cercle). Deux arcs de même rayon permettent de construire un angle  $\widehat{AOC}$  de  $60^\circ$ . On a alors  $\widehat{EOC} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ .

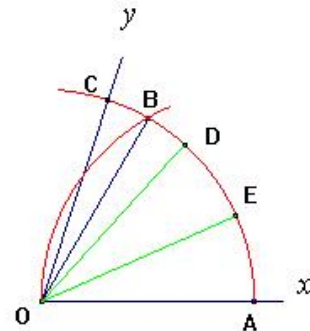
Il ne reste plus qu'à placer D sur l'arc  $\widehat{AEB}$  pour que  $\widehat{DOB} = \widehat{EOC} = 15^\circ$  ce qui suppose encore un arc de cercle. En tout, on a tracé 5 arcs de cercle.



Exercice 3 :  $\frac{72^\circ}{3} = 24^\circ$ .

On peut écrire  $24^\circ = 2 \times (72^\circ - 60^\circ)$ .

Après avoir construit  $\widehat{AOC} = 72^\circ$  et  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ , on a  $\widehat{BOC} = 12^\circ$ . L'arc de centre B et de rayon BC donne le point D. On a alors  $\widehat{COD} = 24^\circ$ . L'arc de centre A de rayon CD donne le point E tel que  $\widehat{AOE} = 24^\circ$ .



Exercice 5 : On pose  $\widehat{OAB} = \alpha$ .

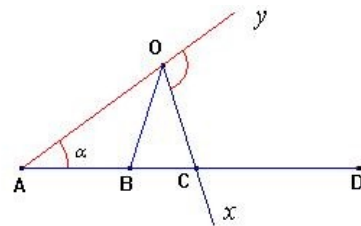
Comme le triangle AOB est isocèle

en B, on a  $\widehat{AOB} = \widehat{OAB} = \alpha$  et  $\widehat{OBC} = 2\alpha$ . Le triangle OBC est isocèle en O :

$$\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = 2\alpha.$$

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - (\widehat{OBC} + \widehat{OCB}) = 180^\circ - 4\alpha.$$

$$\widehat{xOy} = 180^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{BOC}) = 180^\circ - [\alpha + (180^\circ - 4\alpha)] = 3\alpha$$



## 8. La quadrature du cercle

Exercice 1 : La fraction  $\frac{256}{81}$  représente le nombre rationnel 3,1604938227.....

La somme  $3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$  représente le même nombre.

De même  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$  et  $\frac{8}{9}$  représentent le nombre rationnel périodique 0,88888...

Exercice 2 : Le triangle KGD est rectangle en G puisqu'il est inscrit dans un cercle de diamètre [KD]. [AG] est la hauteur de ce triangle relative à son hypoténuse.

On a donc  $AG^2 = AD \times AK = AD \times AB$ .

Exercice 3 : Observons la figure :

aire de la lunule 1 = aire du demi-cercle de diamètre [AB] – aire de la surface rose

aire de la lunule 2 = aire du demi-cercle de diamètre [AC] – aire de la surface verte

donc somme des aires des lunules = somme des aires des 2 demi-cercles – somme des aires des surfaces verte et rose.

Mais la somme des aires des surfaces verte et rose est elle-même égale à l'aire du demi-cercle de diamètre [BC] – aire du triangle rectangle ABC.

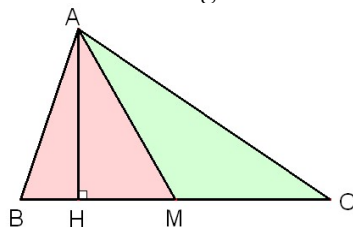
Le théorème de Pythagore permet d'affirmer que la somme des aires des 2 demi-cercles de diamètres respectifs [AB] et [AC] est égale à l'aire du demi-cercle de diamètre [BC].

On en déduit que la somme des aires des lunules est égale à l'aire du triangle ABC.

Exercice 4 : D'après l'exercice 3, la somme des aires des 2 lunules 1 et 2 est égale à l'aire du triangle ABC. De même, la somme des aires des 2 lunules 3 et 4 est égale à l'aire du triangle ADC. Le résultat annoncé en résulte.

## 9. La géométrie d'Euclide

Exercice 1 : Les deux triangles ABM et ACM ont la même hauteur et des bases de même longueur. Ils ont donc des aires égales.



Exercice 2 : Dans cette figure, on trouve 3 couples de triangles symétriques : ABC et ADC, AHK et AEK, KFC et KJC. On déduit de cela que les parallélogrammes HBFK et KEDJ ont des aires égales.

Exercice 3 : On observe que  $S + F - A = 2$  pour chacun des 5 polyèdres réguliers.

## 10. Avec la règle et le compas

Exercice 1 : a)  $15^\circ = \frac{60^\circ}{4} = (60^\circ \div 2) \div 2$ . On peut donc partager en deux un angle de  $60^\circ$  avec une bissectrice puis construire la bissectrice de l'un des angles de  $30^\circ$ .

On a aussi  $15^\circ = \frac{(90^\circ - 60^\circ)}{2}$ . On peut donc construire un angle droit et, à l'intérieur, un angle de  $60^\circ$  de même sommet. Une bissectrice permet d'obtenir l'angle de  $15^\circ$ .

b)  $75^\circ = 60^\circ + 15^\circ = 60^\circ + \frac{60^\circ}{4}$

mais aussi  $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ = 90^\circ - \frac{60^\circ}{4}$ .

Dans les deux cas, il faudra construire deux bissectrices.

Exercice 2 : Comme  $72^\circ = \frac{360^\circ}{5}$ , il suffit de partager un cercle en 5 parties égales donc construire un pentagone régulier.

Exercice 3 : Dans le triangle OAE rectangle en A, on a  $\cos \widehat{AOE} = \frac{OA}{OE} = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$  donc  $\widehat{AOE} = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}+1} = 72^\circ$ .

Exercice 4 : 1°)  $24^\circ = 2 \times (72^\circ - 60^\circ)$ . Un angle de  $24^\circ$  est donc constructible à la règle et au compas.

2°)  $24^\circ \times 15 = 360^\circ$  donc  $24^\circ$  est la mesure de l'angle au centre intercepté par le côté d'un polygone régulier convexe de 15 côtés.

Exercice 5 : Si  $R$  est le rayon de son cercle circonscrit, le côté de l'heptagone construit par la méthode approchée est égal à  $R \frac{\sqrt{3}}{2}$  soit  $R \times 0,8678$ .

Chaque côté d'un heptagone régulier convexe inscrit dans un cercle de rayon  $R$  mesure  $2R \sin \frac{180^\circ}{7}$  soit  $R \times 0,8660$ .

Exercice 6 : Observons que  $3^\circ = \frac{72^\circ - 60^\circ}{4}$ . Comme les angles de  $72^\circ$  et de  $60^\circ$  sont constructibles, leur différence  $12^\circ$  l'est aussi. On partage ensuite l'angle de  $12^\circ$  en 4 parties égales. La construction revient à construire un triangle équilatéral, un pentagone régulier et deux bissectrices. Un angle de  $3^\circ$  est donc constructible avec une règle et un compas.

Puisqu'on peut construire la somme de deux angles, on peut utiliser la construction d'un angle de  $3^\circ$  pour construire, avec la règle et le compas, des angles qui mesurent respectivement  $6^\circ$ ,  $9^\circ$ ,  $12^\circ$ ,  $15^\circ$ , etc. On peut donc construire tout angle dont la mesure est un multiple de  $3^\circ$ .

## 12. L'arithmétique d'Euclide

Exercice 1 : Un nombre entier en « mesure » un autre s'il en est un diviseur.

Exercice 2 : Si  $n$  est ce nombre,  $n - 2$  est un multiple de 3, de 7 et de 11 c'est-à-dire de  $3 \times 7 \times 11 = 231$ . On a donc  $n = (231 \times k) + 2$  avec  $k$  entier. Comme  $n$  a 3 chiffres, on a  $n = (4 \times 231) + 2 = 926$ .

Exercice 3 :

	A	B	C	D	E
1					
2			a= 55		
3			b= 32		
4					
5					
6		x	y	d	
7		55	32	23	
8		32	23	9	
9		23	9	14	
10		14	9	5	
11		9	5	4	
12		5	4	1	
13		4	1	3	
14		3	1	2	
15		2	1	1	
16		1	1	0	
17					
18	algorithme d'Euclide 1				
19					
20					

Les nombres  $a$  et  $b$  sont placés en C2 et en C3.

Les formules à inscrire sont les suivantes :

=C2 en B7 ; =C3 en C7 ; =B7-C7 en D7 ;

=SI(C7>D7;C7;D7) en B8 ; =SI(D7<=C7;D7;C7) en C8 et =B8-C8 en D8.

La ligne 8 est recopiée vers le bas un « certain » nombre de fois mais, comme on ne sait pas à l'avance le nombre des lignes nécessaires, on choisira « à vue ». Pour une construction plus « propre », voir mon livre *Tableur et mathématiques au Collège*. CRDP Académie de Versailles, 1999.

Exercice 4 :

	A	B	C	D	E	F
1						
2			a= 753			
3			b= 246			
4						
5		x	y	q	r	
6		753	246	3	15	
7		246	15	16	6	
8		15	6	2	3	
9		6	3	2	0	
10						
11						
12						
13						
14	algorithme d'Euclide n°2					
15						

Les nombres  $a$  et  $b$  sont placés en C2 et en C3.



Les formules à inscrire sont les suivantes :

=C2 en B6 ; =C3 en C6 ;

=ENT(B6/C6) en D6 ; B6-C6\*D6 en E6.

La ligne 6 est recopiée vers le bas un « certain » nombre de fois.

Exercice 5 : Si  $r = 0, 2, 3$  ou  $4$ , le nombre  $n$  a pour diviseur  $6, 2, 3$  ou  $2$ . Dans ce cas,  $n$  ne peut pas être premier.

Quand on divise un nombre premier supérieur à  $6$  par  $6$ , le reste ne peut être que  $1$  ou  $5$ . Un nombre premier supérieur à  $6$  est donc égal à un multiple de  $6$  augmenté ou diminué de  $1$ .

Par contre, un nombre entier de cette forme n'est pas nécessairement premier : c'est le cas des nombres  $35$  et  $49$  par exemple.

Exercice 6 : Quand on effectue la division euclidienne d'un entier  $n$  par l'un de ses diviseurs  $d$ , le quotient  $q$  obtenu est aussi un diviseur de  $n$ . Si  $d$  est inférieur à  $\sqrt{n}$ , l'autre est plus grand.

La recherche des nombres qui divisent exactement  $n$  peut donc s'arrêter à  $\sqrt{n}$ .

Exemple : recherche des diviseurs de  $54$ .

Comme  $\sqrt{54} = 7,348\dots$ . La recherche sera arrêtée à  $d = 7$ .

1 <sup>er</sup> diviseur	1	2	3	6
2 <sup>e</sup> diviseur	54	27	18	9

Exercice 7 : On obtient  $a = 16, b = 30$  et  $c = 34$ .

### 13. Eureka j'ai trouvé !

Exercice 1 :  $3 + \frac{10}{71} = 3,1408\dots$  et  $3 + \frac{1}{7} = 3,1428\dots$

Exercice 2 : Le côté d'un hexagone régulier a pour longueur le rayon du cercle dans lequel il est inscrit. Le périmètre d'un hexagone inscrit dans un cercle de diamètre  $d$  est donc égal à  $3d$ .

Le côté de l'hexagone circonscrit au cercle de rayon  $r$  est égal à  $2r \tan 30^\circ$ .

Le périmètre de l'hexagone circonscrit au cercle de rayon  $r$  est donc égal à  $12 \times r \tan 30^\circ$  soit  $6,9282$ . Avec ces polygones, on obtient  $3 < \pi < 3,464$ .

Exercice 3 : Posons  $\alpha = \frac{360^\circ}{96}$ .

Le côté  $c$  d'un polygone régulier de  $96$  côtés inscrit dans un cercle de rayon  $r$  vérifie  $c = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$ . Le périmètre du polygone correspondant est donc égal à

$96 \times 2r \sin \frac{\alpha}{2}$  soit  $2r \times 3,1410319\dots$

Le côté  $c'$  d'un polygone régulier de 96 côtés circonscrit à un cercle de rayon  $r$  vérifie  $c' = 2r \tan \frac{\alpha}{2}$ . Le périmètre du polygone correspondant est donc égal à

$$96 \times 2r \tan \frac{\alpha}{2} \text{ soit } 2r \times 3,1427\dots$$

Exercice 4 : Par construction, les triangles des dessins 2 et 3 ont tous la même hauteur et des bases de même longueur. D'après le résultat d'Euclide, leurs aires sont donc égales.

Exercice 5 : 1°) L'aire du cylindre circonscrit à la sphère est égale à  $2\pi r^2 + 2r \times 2\pi r$  c'est-à-dire à  $6\pi r^2$ . Prendre les  $\frac{2}{3}$  de cette aire donne  $4\pi r^2$ .

L'aire d'une sphère vaut 4 fois celle de l'un de ses grands cercles.

2°) Le volume du cylindre circonscrit à la sphère est égal à  $\pi r^2 \times 2r$  soit  $2\pi r^3$ .  $\frac{2}{3}$  de ce volume représentent  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

## 15. Ératosthène mesure la Terre

Exercice 1 : En désignant respectivement par  $L$  et par  $R$  la longueur du méridien et le rayon de la Terre, on a  $\frac{L}{5000} = \frac{360}{7,2}$ . On en tire

$$L = \frac{360 \times 5000}{7,2} = 250000 \text{ stades} \text{ puis } R = \frac{250000}{2 \times 3,14} \approx 39809 \text{ stades. Comme}$$

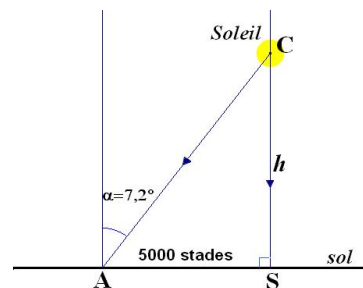
1 stade = 157,50 m, on obtient  $R \approx 6269$  km. La méthode est excellente mais la très bonne précision du résultat est assez heureuse car, à cette époque, les mesures d'angle et de distance étaient assez peu précises.

Exercice 2 : On peut se demander ce qu'il serait advenu des calculs effectués par Ératosthène s'il avait pensé que la Terre n'était pas ronde mais plate ?

Avec les mêmes données,

la figure ci-contre traduit cette nouvelle situation.

S et A désignent toujours les villes de Syène et d'Alexandrie. Observons que, en A, les rayons du Soleil font un angle de  $7,2^\circ$  avec la verticale tandis qu'ils arrivent verticalement en S. Cela signifie que ces rayons ne sont plus parallèles mais se coupent en un point C qui indique alors la position du soleil dans le ciel. Puisque



le triangle CAS est rectangle en S, on a  $\tan \alpha = \frac{AS}{CS}$  d'où  $\frac{5000}{h} = \tan 7,2$ . On en tire  $CS = h = \frac{5000}{\tan 7,2}$  soit 39579 stades environ c'est-à-dire 251 km !

L'hypothèse de la Terre plate amène donc à deux conclusions manifestement fausses :

- 1°) le Soleil est très, très proche de la Terre ;
- 2°) son diamètre est relativement petit.

*Remarque* : malgré les erreurs qu'il présente, ce calcul a été réellement effectué, deux siècles avant notre ère, par des astronomes chinois<sup>1</sup>. Les données employées étaient légèrement différentes de celles d'Ératosthène mais le principe du calcul était le même. Croyant fermement que la Terre était plate, les savants chinois estimèrent avoir prouvé que le Soleil est très proche de la Terre !

## 17. La duplication du carré et celle du cube

Exercice 1 : On obtient  $x = a\sqrt{2}$ . Si  $a = 5$  alors  $x = 7,07$ .

Exercice 2 : Le petit carré ABCD comprend 2 triangles, le grand en comprend 4.

Exercice 3 : On écrirait aujourd'hui  $x^3 = 2a^3$  d'où  $x = a\sqrt[3]{2}$ .

Exercice 4 : Si on prend 4 cm comme côté du petit cube, il faudra prendre  $4 \times \sqrt[3]{2} \approx 5,012$  cm pour l'autre.

Exercice 5 : Si  $\frac{x}{a} = q$ ,  $x = qa$ ,  $y = qx = q^2a$  et  $b = qy = q^3a$ .

Si  $b = 2a$  alors  $2a = q^3a$ . d'où  $q^3 = 2$  et  $q = \sqrt[3]{2} = 1,259921\dots$

Exercice 6 : Avec  $AB = 2,78$  on a  $BC = 5,56$ ,  $DG = x = 3,48$ .

Il en résulte  $\frac{3,48}{2,78} \approx 1,2517\dots$

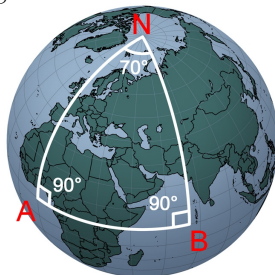
La construction et les mesures ont été faites avec Cabri II Plus.

---

<sup>1</sup> Voir C. Revelli, *Anaximandre de Milet ou la naissance de la pensée scientifique*. Dunod, p. 131-133.

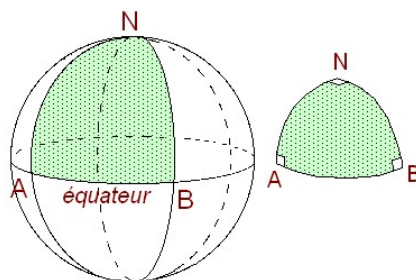
## 18. La géométrie de la sphère

Exercice 1 : Assimilons la Terre à une boule parfaite. La figure montre un triangle sphérique qui a 2 angles droits.



N est le pôle nord de la Terre. A et B sont situés sur l'équateur. Les arcs  $\widehat{NA}$  et  $\widehat{NB}$  sont des quarts de méridien.

Exercice 2 : Le triangle sphérique NAB représente un quart de l'hémisphère nord. Il a 3 angles droits.



La somme des angles d'un tel triangle est égale à  $270^\circ$ .

Exercice 3 : Oui. Chaque côté du triangle précédent a pour longueur le quart de celle d'un grand cercle.

## 20. Les tables trigonométriques de Ptolémée

Exercice 1 :  $AB = 2AH = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ . Si  $R = 1$  unité et si  $\alpha = 1^\circ$ , la corde mesure 0,0349048.

Exercice 2 :  $1^\circ$  corde ( $12^\circ$ ) = 0,209057.

$2^\circ$  Après avoir calculé corde ( $6^\circ$ ) puis corde ( $3^\circ$ ), on obtient corde ( $\frac{3^\circ}{2}$ ) = 0,026179 et corde ( $\frac{3^\circ}{4}$ ) = 0,013090.

$3^\circ$  Il obtient corde ( $1^\circ$ ) = 0,017453.

4°) Finalement, Ptolémée obtient corde  $(\frac{1^\circ}{2}) = 0,008727$ . On peut comparer cette valeur à la longueur d'une corde de  $0,5^\circ$  qui vaut  $2 \times \sin(\frac{0,5^\circ}{2}) = 0,008726535\dots!$

## 21. La fin des mathématiques grecques

Exercice 1 : Le théorème de Pythagore permet d'obtenir  $AC = 12$  ce qui donne  $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$  et, d'après la formule de Héron,

$$S = \sqrt{15 \times 10 \times 2 \times 3} = \sqrt{900} = 30.$$

*Remarque :* on pouvait également faire aire du triangle égale à :  $\frac{AC \times AB}{2} = \frac{12 \times 5}{2} = 30$ .

Exercice 2 : 1°)  $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$  et

$$S = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7056} = 84.$$

2°) Comme  $S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AH \times 14}{2} = 7AH$ ,

on en déduit que  $AH = \frac{84}{7} = 12$ .

Le théorème de Pythagore permet de voir que  $HB = 5$  d'où  $HC = 9$ .

Exercice 3 : Calculons  $\sqrt{A}$  pour  $A > 0$ .

Comme première approximation, on peut prendre le nombre  $\frac{A}{2}$ . Il faut ensuite :

– nommer A la cellule B1 ; écrire les formules  $=A/2$  en A2,  $=A/(A2*A2)$  en B2 et  $=(A2+B2)/2$  en A3 ;

– recopier le contenu de B2 en B3 avec la commande *Recopie vers le bas* ;

– recopier les contenus des cellules A3 et B3 un certain nombre de fois vers le bas.

On peut ensuite remplacer 10 par n'importe quel autre nombre positif.

	A	B	C
1	A= 10		
2	5	2	
3	3,5	2,85714286	
4	3,17857143	3,14606742	
5	3,16231942	3,1622359	
6	3,16227766	3,16227766	
7	3,16227766	3,16227766	
8	3,16227766	3,16227766	
9	3,16227766	3,16227766	
10	3,16227766	3,16227766	
11	3,16227766	3,16227766	
12	3,16227766	3,16227766	
13	3,16227766	3,16227766	
14	3,16227766	3,16227766	
15			
16			

Exercice 4 : Il faut calculer  $\sqrt[3]{80}$  avec la formule  $a' = \frac{1}{2} \left( a + \frac{80}{a^2} \right)$ . Comme première approximation, on peut encore prendre  $\frac{A}{2}$ . Il faut ensuite :

	A	B	C
1	A= 80		
2	40	0,05	
3	20,025	0,19950094	
4	10,1122505	0,78233787	
5	5,44729417	2,6960524	
6	4,07167328	4,82552024	
7	4,44859676	4,04244299	
8	4,24551988	4,4384183	
9	4,34196909	4,24342502	
10	4,29269705	4,34139705	
11	4,31704705	4,29256048	
12	4,30480377	4,31701213	
13	4,31090795	4,30479514	
14	4,30785154	4,31090578	
15	4,30937866	4,307851	
16	4,30861483	4,30937852	
17	4,30899668	4,3086148	
18	4,30880574	4,30899667	
19	4,3089012	4,30880573	
20	4,30885347	4,3089012	
21	4,30887734	4,30885347	
22			

- nommer A la cellule B1 ; écrire les formules =A/2 en A2, =A/(A2\*A2) en B2, =(A2+B2)/2 en A3 ;
- recopier le contenu de B2 en B3 avec la commande *Recopie vers le bas* ;
- recopier les contenus des cellules A3 et B3 un certain nombre de fois vers le bas.

## 22. Les codes secrets des Grecs

Exercice : Il y a  $25 \times 24 \times 23 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  soit  $25!$  carrés de Polybe possibles.